

文章编号: 1673-9469 (2018) 02-0053-05

doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2018.02.012

## 基于离散虚内键 (DVIB) 的岩石粘弹性模拟初探

赵兵<sup>1</sup>, 何汪洋<sup>2</sup>, 王毓杰<sup>2</sup>, 刘志远<sup>1</sup>, 张振南<sup>2</sup>

(1. 中石化西北油田分公司石油工程技术研究院, 新疆乌鲁木齐 830011; 2. 上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院, 上海 200240)

**摘要:** 为了将离散虚内键模型 (DVIB) 推广至粘弹性材料, 在 DVIB 中引入粘性键并与原超弹性键并联来反映材料的粘弹性机理。应用该方法对岩石粘弹性力学行为模拟进行了初探。结果表明该方法能够再现岩石蠕变三阶段特征、弹性后效、强度率相关及蠕变断裂基本过程。进一步研究表明, 粘性对动态裂纹扩展和分叉具有很大的影响, 延缓了裂纹扩展, 削弱了裂纹分叉行为, 为岩石粘弹性力学行为的模拟提供了一种新的可行方法。

**关键词:** 岩石; 粘弹性; 蠕变; 断裂; 离散虚内键

**中图分类号:** TD313

**文献标识码:** A

## Preliminary research on numerical simulation of viscoelasticity of rock based on Discretized Virtual Internal Bonds

ZHAO Bing<sup>1</sup>, HE Wangyang<sup>2</sup>, WANG Yujie<sup>2</sup>, LIU Zhiyuan<sup>1</sup>, ZHANG Zhennan<sup>2</sup>

(1.SINOPEC Northwest Branch, 466 Changchun Road South, 830011, Urumqi, China; 2.School of Naval Architecture, Ocean and Civil Engineering, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai, 200240)

**Abstract:** To extend the discretized virtual internal bond (DVIB) to viscoelastic materials, a viscous bond is introduced into the original DVIB, paralleling to the original hyperelastic bond. Through the coupled hyperelastic and viscous bonds, the micro viscosity mechanism can be accounted. The preliminary researches on the numerical simulation of the rock viscoelasticity are conducted by this method. It suggests that this method can represent the typical three-stage-feature of creep, the elastic delay, rate-dependency of rock strength and creep fracturing process. The further simulation suggests that the viscosity has significant impact on the dynamic fracture initiation, propagation and branching. It delays the fracture growth and weakens the fracture branching. A new and feasible approach to viscoelasticity simulation is presented in this paper.

**Key words:** Rock; Viscoelasticity; Creep; Fracture; Discretized Virtual Internal Bond

岩石粘弹性行为在岩石工程中具有重要作用。围绕这一问题, 国内外学者从多方面对这一问题展开研究。力学实验是研究岩石粘弹性行为的一个重要方法, 但一般岩石粘弹性试验周期长, 大量开展实验研究具有一定的难度。结合特定的实验结果, 建立合理的力学模型对这一问题进行数值模拟研究确是一条有效途径。粘弹性断裂会导致岩石结构破坏。如果能有效地模拟岩石粘弹性断裂, 将具有重要意义。断裂过程包含裂纹生成、扩展及汇合过程。

传统连续介质力学方法在处理这一类问题时存在一定的困难。而格子方法在这方面却有较大优势<sup>[1-5]</sup>。它避免了复杂的连续介质断裂准则及网格重划分问题, 将三维问题缩减到一维键断裂问题, 使问题大为简化。在这一类模型中, DVIB 是一种新发展的格子模型<sup>[6]</sup>。它与一般格子模型不同之处在于其结构由离散键元胞组成。每个键元胞可以具有任意几何形状及任意条键。因而 DVIB 可以反映岩石材料的细观结构特征。近年来, DVIB 已广泛用于断裂

收稿日期: 2018-01-18

基金项目: 国家科技重大专项课题 (2016ZX05014-005); 国家自然科学基金资助项目 (11772190)

作者简介: 赵兵 (1983-), 男, 四川遂宁人, 硕士, 工程师, 主要从事酸化压裂增产技术及岩石断裂数值模拟方面研究。

模拟<sup>[7-9]</sup>,取得了不错的效果。为了探索岩石粘弹性有效的数值模拟方法,将粘性键引入 DVIB 中。经数值模拟发现这种方法能再现蠕变断裂、弹性后效、强度率相关特性,是一种可行的岩石粘弹性模拟方法。

## 1 考虑粘弹性效应的 DVIB 模型

### 1.1 本构模型

DVIB<sup>[6]</sup>认为材料由键元胞组成。最初 DVIB 中的键为超弹性,为了能够反映岩石的粘性,在原超弹性键中并联一个粘性原件,构成一个超弹性-开尔文(HK)键,如图1所示。HK键的势能函数可写为

$$\psi = \Phi(l) + \tilde{\eta} \dot{l} (l - l_0) \quad (1)$$

其中: $l$ 为现时构型中的键长; $l_0$ 为参考构型中的键长; $\dot{l}$ 为键的变形速率, $\dot{l} = \partial l / \partial t$ ;  $\Phi(l)$ 是超弹键的势函数; $\tilde{\eta}$ 为微观粘性系数, $\tilde{\eta} = F_c / \dot{l}$ ,  $F_c$ 为由键的变形速率而产生的键内力。

对于一个由 HK 键组成的键元胞,其节点力向量可推导为

$$F_i = \sum \frac{\partial \psi}{\partial u_i} = \sum \left( \Phi'(l) \cdot \frac{\partial l}{\partial u_i} + \tilde{\eta} \dot{l} \cdot \frac{\partial l}{\partial u_i} + \tilde{\eta} (l - l_0) \cdot \frac{\partial \dot{l}}{\partial u_i} \right) \quad (2)$$

切线刚度矩阵为

$$K_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \sum \left[ \Phi''(l) \cdot \frac{\partial l}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial l}{\partial u_j} + \Phi'(l) \cdot \frac{\partial^2 l}{\partial u_i \partial u_j} - \tilde{\eta} l_0 \cdot \frac{\partial^2 \dot{l}}{\partial u_i \partial u_j} \right] \quad (3)$$

粘性矩阵为

$$C_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \dot{u}_j} = \sum \tilde{\eta} \left( \frac{l - l_0}{l} p_{ij} + \frac{l}{l_0} \cdot \frac{\partial \dot{l}}{\partial \dot{u}_j} \cdot \frac{\partial l}{\partial u_i} \right) \quad (4)$$

其中:为键元胞结点力向量的分量; $p_{ij} = (\delta_{4i} - \delta_{1i})(\delta_{4j} - \delta_{1j}) + (\delta_{5i} - \delta_{2i})(\delta_{5j} - \delta_{2j}) + (\delta_{6i} - \delta_{3i})(\delta_{6j} - \delta_{3j})$ ,  $\delta_{ij}$ 为克罗耐克符号。

### 1.2 参数标定

文[6]基于理想键元胞方法将键的初始刚度系数标定为

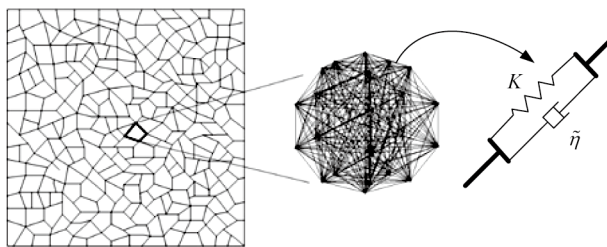


图1 粘弹性离散键元胞建模方法

Fig.1 Viscoelastic DVIB modeling method

$$\Phi''(l_0) = \frac{\lambda E V}{\Omega_0^2} \quad (5)$$

其中: $E$ 为杨氏模量, $V$ 为元胞体积; $\lambda$ 为系数,对于三维情况 $\lambda=6$ ,对于二维平面应力 $\lambda=3$ 和平面应变 $\lambda=3.2$ 。

对于键的粘性系数标定,可类比于单轴拉伸试验。首先通过如下关系来定义宏观粘性系数 $\eta$

$$\sigma = \eta \dot{\epsilon} \quad (6)$$

其中: $\sigma$ 为单轴拉伸应力; $\dot{\epsilon}$ 为单轴拉伸应变率。

为了建立微观与宏观粘性系数的关系,类比于泊松比为0.25的弹性体胡克定律,将式(6)扩展成三维情况,即:

$$[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, \sigma_{31}]^T = M_c [\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{33}, 2\dot{\epsilon}_{12}, 2\dot{\epsilon}_{23}, 2\dot{\epsilon}_{31}] \quad (7)$$

其中: $\sigma_{ij}$ ,  $\epsilon_{ij}$ 分别为应力张量与应变张量的分量; $M_c$ 为宏观粘性矩阵。

同样基于理想键元胞思想<sup>[6]</sup>,当键足够多时,式(4)可写成积分形式。然后对式(4)进行积分可得键元胞的粘性矩阵 $M_b$ 。将 $M_c$ 与 $M_b$ 相等,即: $M_c = M_b$ ,则可得出微宏观粘性系数关系为

$$\tilde{\eta} = \frac{\lambda \eta V}{\Omega_0^2} \quad (8)$$

其中:系数 $\lambda$ 取值同式(5)。

## 2 模拟算例

### 2.1 蠕变算例

粘弹性是蠕变的一种内在机制,为了检验本模型是否能够再现蠕变及卸载后的力学行为,将对图2(a)所示单轴拉伸试件进行数值模拟。采用三角形键元胞对试件进行离散,如图2(b)所示。计算参数: $E=40$  GPa,  $\eta=1\ 000$  GPa·s。采用线弹性键势函数,其对键长的一阶导数(键内力)为

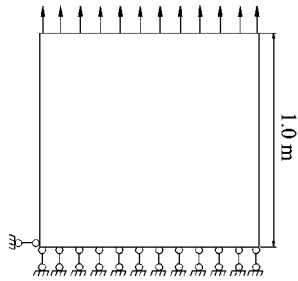
$$\Phi'(l) = A(l - l_0) \quad (9)$$

其中:参数 $A$ 为键的初始刚度系数, $A = \Phi''(l_0)$ ,可由式(5)来确定。

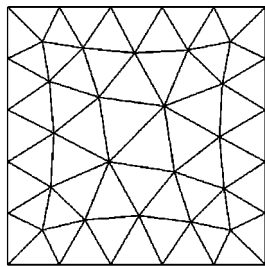
加载曲线如图3(a)所示。取不同加载时间: $t_1=20$  s,  $t_1=50$  s,  $t_1=70$  s及 $t_1=\infty$ 时,模拟结果与解析解(当 $t < t_1$ 时,  $\epsilon = [1 - \exp(-Et/\eta)] \sigma_0/E$ ; 当 $t \geq t_1$ 时,  $\epsilon = [1 - \exp(-Et_1/\eta)] \exp[-E(t-t_1)/\eta] \sigma_0/E$ )对比,如图3(b)所示。从图中可看出,模拟结果与解析解基本重合,这说明本方法能够模拟岩石的蠕变行为,而且具有很高的精度。

## 2.2 强度的率相关性模拟

强度率相关是很重要的岩石动力特征,而粘弹性是其中的一个重要机制。为了检验本方法能否再现岩石强度的率相关特征,对不同应变率条件下的图2试



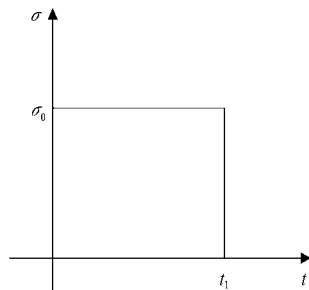
(a) 试件尺寸及边界条件



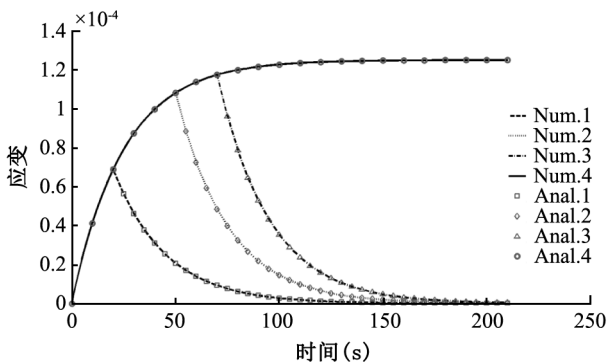
(b) 网络划分示意图 (三角形键元胞)

图2 单轴拉伸试件

Fig.2 Uniaxial tensile test



(a) 加载曲线



(b) 应变与时间关系

(其中 Num.1, Num.2, Num.3, Num.4 与 Anal.1, Anal.2, Anal.3, Anal.4 分别对应  $t_1=20$  s,  $t_1=50$  s,  $t_1=70$  s 及  $t_1=\infty$  时的模拟与解析解.)

图3 蠕变模拟

Fig.3 Creep simulation

件进行模拟。采用如下弹性键势函数,其一阶导数为

$$\Phi'(l) = \begin{cases} A(l-l_0) & \text{if } l \leq l_0 + l_0 \varepsilon_l \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad (10)$$

其中:  $\varepsilon_l$  为材料单轴拉伸时峰值应力所对应的应变。注意到式 (11) 已包含键的断裂准则。模拟的试件抗拉强度与应变率的关系如图4所示。

从图4中可以看出,应变率在  $10^{-1} \text{ s}^{-1}$  以下时,抗拉强度随着应变率增加而缓慢增加,应变率高于  $10^2 \text{ s}^{-1}$  时,抗拉强度随着应变率的增加而出现快速增加的趋势;这与文<sup>[10-11]</sup>所得到的规律基本一致;当应变率大于一定值时,强度随着粘性系数增加也会明显增加,这说明了岩石的粘性是其产生率相关现象的原因之一。

## 2.3 拉伸蠕变断裂模拟

为了检验此模型能否模拟岩石蠕变断裂过程,在图2所示的矩形试件中预设一中心裂纹(长度:0.1 m)。采用超弹性键势函数,其对键长的一阶导数为

$$\Phi'(l) = A(l-l_0) \exp\left(-\frac{l-l_0}{B}\right) \quad (11)$$

其中:键能参数  $A=\Phi''(l_0)$  按式(5)取值;参数  $B=\varepsilon_l l_0$ ,  $\varepsilon_l=0.0002$ 。

对试件施加不同的单向拉应力:  $\sigma_0=1.5$  MPa,  $\sigma_0=2.5$  MPa,  $\sigma_0=3.0$  MPa 和  $\sigma_0=3.5$  MPa。模型参数为:  $E=40$  GPa,  $\eta=1500$  GP·s。模拟的应变-时间曲线如图5所示,从图中可看出当应力较小( $\sigma_0=1.5$  MPa)时,应变增加到一定值后而不再增加,进入稳定状态。随着应力的增加,发现蠕变破坏的三阶段特征得以再现,而且应力水平越高,平稳阶段的持续时间越长,这与一般蠕变规律相一致。

所模拟的蠕变断裂过程如图6所示。从图中可

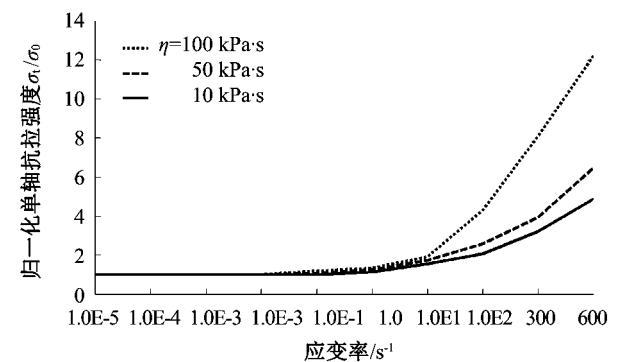


图4 不同粘性系数条件下的岩石抗拉强度与应变率的关系 ( $\sigma_0=E\varepsilon_l$ )

Fig.4 Relationship between strength and strain rate with different viscosity coefficients ( $\sigma_0=E\varepsilon_l$ )

看出,当时间小于一定值时,裂纹并没有扩展,而当时间超过一定值时,裂纹开始扩展,而且很快导致试件破坏,这说明本方法可以模拟蠕变断裂过程。

## 2.4 粘性对动态裂纹分叉的影响

岩石在受到脉冲荷载作用时会产生动态裂纹失稳扩展。为了探索岩石粘性对裂纹分叉的影响,对

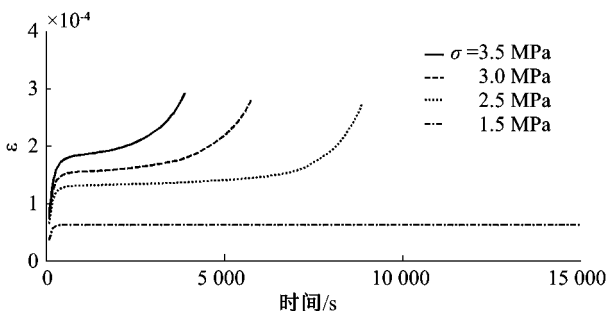


图5 不同应力水平下的蠕变曲线  
Fig.5 Creep curves at different stress levels

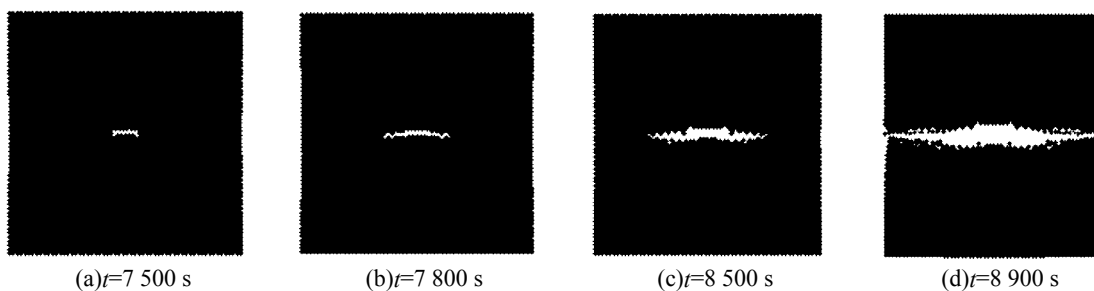


图6 蠕变断裂过程( $\sigma_0=2.5$  MPa)  
Fig.6 Creep fracturing process( $\sigma_0=2.5$  MPa)

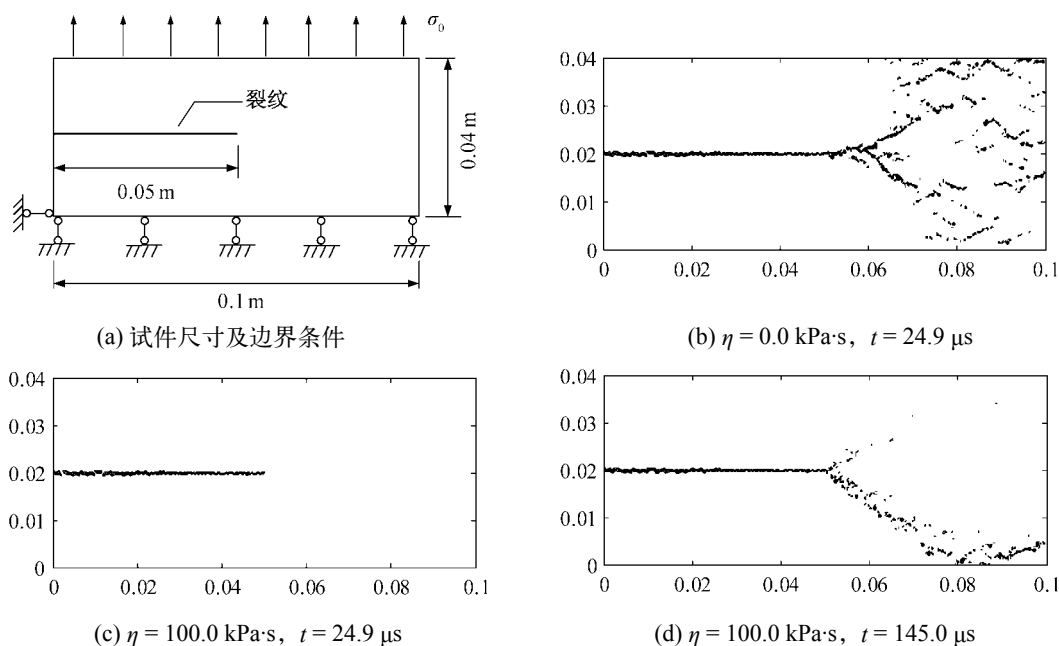


图7 动态裂纹分叉模拟

Fig.7 Simulation of dynamic fracture branching

经典裂纹分叉例子进行模拟。模拟试件及边界条件如图 7(a) 所示。在一矩形条板左侧预设一条裂纹,在条板上侧施加常应力。在施加常应力时,采用特殊计算技术保持上边界各结点竖向位移相等。采用式 (11) 作为键势函数,计算参数:  $\sigma_0=1.5$  MPa,  $E=40$  GPa,  $\varepsilon_c=0.000 2$ , 材料密度  $\rho=2 400$  kg/m<sup>3</sup>。

模拟结果如图 7(b—d) 所示。从图中可看出,当不考虑粘性时 ( $\eta=0.0$  kPa·s), 可发现试件在很短时间内 ( $t=24.9$  μs) 主裂纹分叉扩展,并且在不同位置处有离散裂纹产生,如图 7(b) 所示。而考虑粘性时 ( $\eta=100.0$  kPa·s), 在相同的时间内,即:  $t=24.9$  μs, 裂纹并没有扩展(图 7c)。在经过很长时间,即:  $t=145.0$  μs 时, 裂纹扩展模式如图 7(d) 所示。图中显示裂纹也存在分叉行为,但不明显,而且也没有很多离散裂纹出现。从模拟结果来看,粘性对动态裂纹扩展会起到延时效应,同时会降低裂纹分叉及离散裂纹生成。粘性对动态裂纹生成和扩展影响是很明显的。

### 3 结论

为了在 DVIB 基础上探索岩石粘弹性力学行为模拟的模拟方法, 在 DVIB 中引入了粘性键, 与原超弹性键并联, 形成超弹性 - 开尔文键。应用该模型对蠕变、弹性后效、强度率相关特性、蠕变断裂及动态裂纹分叉过程进行了初步模拟。结果表明本方法是可以再现岩石粘弹性力学行为的基本特征和过程。进一步研究表明, 粘弹性对裂纹分叉具有很强的抑制作用, 同时也大大延缓了裂纹的扩展。嵌入超弹性 - 开尔文键的 DVIB 是可以模拟一些粘弹性力学行为的。但本文中所嵌入的粘弹性元件较为简单, 还不能再现更复杂的粘弹性力学行为, 还需要进一步深入研究。

#### 参考文献:

- [1] LILLIU G, VAN Mier JGM. 3D lattice type of fracture model for concrete[J]. Eng Fract Mech, 2003, 70: 927-941.
  - [2] KALE S, OSTOJA-Starzewski M. Elastic-Plastic-Brittle transitions and avalanches in disordered media[J]. Phys Rev Lett, 2014, 112: 045503.
  - [3] JIRASEK M, BAZANT Z P. Macroscopic fracture characteristics of random particle systems[J]. International Journal of Fracture, 1994, 69(3): 201-228.
  - [4] ZHAO S F, ZHAO G F. Implementation of a high order lattice spring model for elasticity[J]. Int J Solids Struct, 2012, 49: 2568-2581.
  - [5] ZHAO G F. Developing a four-dimensional lattice spring model for mechanical responses of solids[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2017, 315: 881-895.
  - [6] ZHANG Z. Discretized virtual internal bond model for nonlinear elasticity[J]. Int J Solids Struct, 2013, 50: 3618-3625.
  - [7] ZHANG Z, CHEN Y. Modeling nonlinear elastic solid with correlated lattice bond cell for dynamic fracture simulation[J]. Comput Methods Appl Mech Eng, 2014, 279: 325-347.
  - [8] ZHANG Z, YAO Y, MAO X B. Modeling wave propagation induced fracture in rock with correlated lattice bond cell[J]. Int J Roc Mech Min Sci, 2015, 78: 262-270.
  - [9] ZHANG Z, DING J F, Ghassemi A, et al. A hyperelastic-bilinear potential for lattice model with fracture energy conservation[J]. Eng Fract Mech, 2015, 142: 220-235.
  - [10] 宫凤强, 陆道辉, 李夕兵, 等. 不同应变率下砂岩动态强度准则的试验研究 [J]. 岩土力学, 2013, 34(9): 2433-2441.
  - [11] ZHANG Q B, ZHAO J. A review of dynamic experimental techniques and mechanical behaviour of rock materials[J]. Rock mechanics and rock engineering, 2014, 47(4): 1411-1478.
  - (责任编辑 王利君)
- 
- (上接第 52 页) 2016, 14(3): 17-22.
- [2] 黄永红. 灰色 -BP 神经网络在深基坑变形预测中的应用研究 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2016, 29(5): 18-22.
  - [3] VIADIMIR N, VAPNIK V. The nature of statistical learning theory[M]. New York: Springer, 1999.
  - [4] VAPNIK VN. An overview of statistical learning theory[J]. IEEE Transaction on Neural Networks, 1999, 10(10): 988-999.
  - [5] SUYKENS J A K, VANDEWALLE J. Least squares support vector machine classifiers[J]. Neural Processing Letters, 1999, 9(3): 293-300.
  - [6] SUYKENS J A K, VANDEWALLE J. Recurrent least squares support vector machines[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems, 2000, 47(47): 1109-1114.
  - [7] SUYKENS J A K. Support vector machines: a nonlinear modeling and control perspective[J]. European Journal of Control, 2001, 7(2-3): 311-327.
  - [8] 王小川, 史峰, 郁磊, 等. MATLAB 神经网络 43 个案例分析 [M]. 北京: 北京航空航天大学出版社, 2013.
  - [9] 代兴兰. 遗传算法与最小二乘支持向量机在年径流预测中的应用 [J]. 水资源与水工程学报, 2014, 25(6): 232-233.
  - [10] 张钦礼, 陈秋松, 王新民, 等. 全尾砂絮凝沉降参数 GA-SVM 优化预测模型研究 [J]. 中国安全生产科学技术, 2014, 10(5): 25-26.
  - [11] 曹净, 丁文云, 赵党书, 等. 基于 PSO-LSSVM 模型的基坑变形时间序列预测 [J]. 控制工程, 2015, 22(3): 476-479.
  - (责任编辑 王利君)