

文章编号:1673-9469(2024)01-0017-06

DOI:10.3969/j.issn.1673-9469.2024.01.003

悬臂结构地震响应分析的广义单自由度模型研究

吴承宇,何 军*

(上海交通大学 船舶海洋与建筑工程学院土木工程系,上海 200240)

摘要: 针对有限元方法存在计算时间过长的缺点,不适用于需要多次响应分析的结构抗震性能评估问题。进行了悬臂结构线性地震响应分析的广义单自由度模型研究,提出了多项式形函数和基于多项式形函数的单自由度模型,并通过与有限元分析结果的对比分析,调查了基于多项式形函数的单自由度模型对典型地震波激励下结构响应分析的有效性。结果表明:提出的基于多项式形函数的广义单自由度模型平均误差为7.20%,为提高建模准确性,建议采用水平集中荷载施加方法进行多项式形函数参数估计。

关键词: 悬臂结构;地震响应;广义单自由度模型;形函数;参数估计

中图分类号: TU311.3

文献标识码: A

Study on the Generalized Single Degree of Freedom Model for Seismic Response Analysis of Cantilever Structures

WU Chengyu, HE Jun*

(Department of Civil Engineering, School of Ocean and Civil Engineering,
Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The finite element method has the disadvantage of being time-consuming and is not suitable for evaluating the seismic performance of structures that require multiple response analyses. A generalized single degree of freedom model for linear seismic response analysis of cantilever structures was studied, and the polynomial shaped functions and single degree of freedom models based on the polynomial shaped functions were proposed. The effectiveness of the single degree of freedom model based on the polynomial shaped functions for structural response analysis under typical seismic wave excitation was investigated through comparative analysis with the finite element analysis results. The results show that the average error of the proposed generalized single degree of freedom model based on polynomial functions is 7.20%. To improve the modeling accuracy, it is recommended to use the method of applying horizontal concentrated loads for polynomial function parameter estimation.

Key words: cantilever structures; earthquake responses; generalized single degree of freedom model; shape functions; parameter estimation

悬臂结构是工程中常见的一种建筑结构,如水塔、烟囱、输电塔,甚至高层建筑,在进行其地震响应分析的时候,可以将它们处理为悬臂结构。悬臂结构的地震响应分析一般通过有限元方法来进行,但是,有限元分析往往需要较长的计算时间,这对于需要运行多次受力性能分析的情况(如

结构可靠度计算或结构易损性评估等),会带来计算费用过大的问题。因此,建立悬臂结构地震响应的简化模型,对提高悬臂结构地震响应和抗震性能分析的效率,具有重要的意义。

悬臂结构地震响应的简化方法包括振型分解反应谱法、底部剪力法、推覆分析方法和广义

收稿日期:2023-04-23

基金项目:国家自然科学基金资助项目(5197080363)

作者简介:吴承宇(1998-),男,澳门人,硕士研究生,主要从事结构地震安全性的研究。

* 通信作者:何军(1968-),男,河北唐山人,博士,教授,主要从事结构可靠度和地震安全性研究。

单自由度模型方法等。李明政等^[1]利用振型分解反应谱法和时程分析法计算料仓-框架结构的地震响应,并针对其位移和应力进行比较,给出时程分析比振型分解反应谱法分析更加精确的结论。马安财等^[2]提出了相应地震响应分析的振型叠加法,结合一实际深水隔震连续梁桥,通过与有限元计算结果对比,验证了该方法的有效性。1920 年,日本学者大森房吉提出基于结构底部剪力法的静力理论,美国加州 1952 年的侧力规范采纳了底部剪力法。夏仕洋等^[3]基于底部剪力法提出了对阻尼器参数进行优化的简化方法,并通过时程分析法对结构的抗震性能进行了验证。早在 1975 年, Freeman^[4]提出了推覆分析法,用于评估地震活动频繁区域的建筑物的抗震性能。黄超等^[5]用推覆分析方法对结构进行静力弹塑性分析,根据力-变形关系和侧向位移形状函数,确定了等效单自由度模型的相关系数。张大巍等^[6]采用弹塑性静力推覆分析法和弹塑性时程分析法对某典型发电厂主厂房的抗震性能进行评估。广义单自由度模型方法较早由 Clough 等^[7]提出,他们将实际体系的响应分析归入广义单自由度类型,即当体系运动限制为单一变形形式时,在数学意义上只有一个自由度。程鹏飞等^[8]以某大型斜拉桥为工程实例,基于一阶振型的广义质量和广义刚度发展了广义单自由度模型,分析了梁端位移和塔梁相对位移。与全桥模型进行对比分析后,验证了广义单自由度模型的可行性。王赞芝等^[9]利用振型函数,将具有分布质量的弹性体转化为一个广义单自由度振动系统,并提出了一种计算简支梁在均布随机荷载下位移极值响应的方法。Song^[10]和 Der Kiureghian 等^[11]采用广义单自由度模型建立了变电站一次设备支架结构地震响应分析的快速方法。

本研究聚焦于悬臂结构地震响应的快速分析,强调广义单自由度模型的形函数选择对准确性的关键影响。针对当前缺乏通用形函数模型的问题,本文提出了基于多项式形函数的广义单自由度模型,并深入研究了其在地震波激励下的有效性。通过此项研究,旨在为结构抗震性能的评估提供更准确、快速的分析工具。

1 广义单自由度模型简介

如图 1 所示,本文研究的广义单自由度模型将悬臂结构简化成一个由质点、弹簧、阻尼组成

的单自由度系统,质点只有一个水平自由度,质点与地面之间由一个无质量的弹簧和阻尼单元连接。

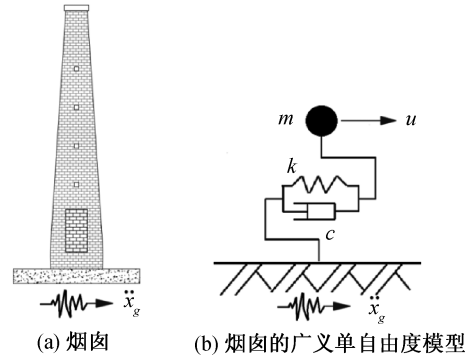


图 1 悬臂结构的广义单自由度模型

Fig. 1 Generalized single-degree-of-freedom model of cantilever structure

在广义单自由度模型中,结构位移响应被表示为 $X(y,t) = \varphi(y)z(t)$, 其中的 y 为距地面的距离(高度), $\varphi(y)$ 为位移形函数, $z(t)$ 是反映位移形状随时间变化的广义坐标。由虚功原理,可以得到广义单自由度模型的等效质量 m 、等效刚度 k 、等效阻尼 c 和产生外部惯性力的等效质量 l 的计算式^[10]

$$m = \int_0^L \rho(y) [\varphi(y)]^2 dy \quad (1)$$

$$k = \int_0^L EI(y) [\varphi''(y)]^2 dy \quad (2)$$

$$c = 2\zeta \sqrt{mk} \quad (3)$$

$$l = \varphi(y_0) \int_0^L \rho(y) \varphi(y) dy \quad (4)$$

式中, L 为结构高度, m ; $\rho(y)$ 为线密度, kg/m ; $EI(y)$ 为抗弯刚度函数, $\text{N} \cdot \text{m}^2$; $\varphi(y)$ 为位移形函数。

由此,可将悬臂结构的运动方程简化为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -l\ddot{x}_g \quad (5)$$

式中, u 为质点相对于地面的位移, m ; $\dot{u}$ 和 $\ddot{u}$ 分别为 u 的一阶和二阶(时间)导数, m/s , m/s^2 ; $\ddot{x}_g$ 为地面的加速度, m/s^2 。

对于悬臂结构,形函数 $\varphi(y)$ 应该满足几何边界条件 $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 0$ 和 $\varphi(L) = 1$, 另外,形函数 $\varphi(y)$ 还应该满足力的边界条件 $\varphi''(L) = 0$ 和 $\varphi'''(L) = 0$ 。由于实际工程中悬臂结构的高宽比较大,在水平地震作用下,其横向弯曲变形为主导,而剪切变形对结构的影响可以忽略不计,因此可以不考虑力的边界条件 $\varphi'''(L) = 0$ 。

对于悬臂结构,常用的位移形函数类型是抛

物线形函数和三角函数形函数^[12]:

$$\varphi(y) = \left(\frac{y}{y_0}\right)^2 \quad (6)$$

和

$$\varphi(y) = 1 - \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right) \quad (7)$$

式中, y_0 为结构某部位的高度, m ; L 为结构总高度, m 。

抛物线形函数通常被假设为近似描述结构位移分布的二次曲线形式。它假设结构的位移在横向上均匀分布,并具有对称的曲线形状。然而,在实际情况下,结构的变形可能呈现非线性和非对称的特征,抛物线形函数无法准确描述这些复杂的变形模式,从而导致精度不高。

三角函数形函数是另一种常用的位移函数类型。它以正弦函数和余弦函数为基础,通过调整振幅、频率和相位来适应结构的变形特征。三角函数形函数常用于描述周期性或周期性近似的位移分布,如梁的弯曲振动或柔性结构的模态形态。然而,这种假定限制了位移分布的形式,虽然它满足端点的几何边界条件,但却不是一个符合实际的假设。

2 多项式形函数

考虑到上述两种位移形函数的局限性,并结合悬臂结构的几何边界条件和力的边界条件,本研究提出一种多项式形函数:

$$\varphi(y) = a\left(\frac{y}{y_0}\right)^2 + b\left(\frac{y}{y_0}\right)^3 \quad (8)$$

式中, a 和 b 为待定系数, y_0 为结构特定部位的位置(高度), m 。

高度 y_0 由所考虑的地震响应的位置确定。如果考虑结构顶部的地震响应,则 y_0 等于结构的高度,而当考虑结构中间位置地震响应的时候, y_0 应等于结构高度的 $1/2$ 。系数 a 和 b 由结构静力反应计算结果或基本振型计算结果确定。因为结构静力反应或基本振型的计算费用比较少,因此,可以由较少的计算费用确定待定系数 a 和 b 。注意,为满足边界条件 $\varphi(y_0) = 1$,系数 a 和 b 应满足关系式 $a + b = 1$ 。

公式(8)定义了只包含二次和三次项的三次多项式函数。满足几何边界条件 $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0$ 和 $\varphi(y_0) = 1$ 以及力的边界条件 $\varphi''(y_0) = 0$ 。公式(6)和公式(7)所定义的抛物线形函数和三角函数

形函数,分别是基于悬臂结构在自由振动时的挠曲形状的假设以及在悬臂结构的顶点受到单位侧向力作用引起的挠度公式所计算得出的。其中,后者的计算精度相对较高。然而,本研究提出的多项式形函数则是通过从有限元计算结果中提取结构位移并进行拟合而得到。相较于前两种形函数,多项式形函数改善了公式形式单一固定、通用性低等缺点。

3 基于多项式形函数的广义单自由度模型

下面以理想化变截面悬臂结构为例,说明基于多项式形函数的广义单自由度模型的建模过程。

3.1 结构的设计参数

考虑图 2(a)所示的底部固接上端自由的变截面悬臂钢杆。杆的总高 $L = 10\text{ m}$, 顶端圆截面半径 $R_1 = 0.2\text{ m}$, 底端圆截面半径 $R_2 = 0.3\text{ m}$ 。钢材弹性模量 $E = 2 \times 10^{11}\text{ Pa}$ 。钢杆沿 y 轴的线密度 $\rho(y) = 123.3y + 914.5\text{ kg/m}$, 截面惯性矩 $I(y) = 2.962 \times 10^{-5}y^2 + 1.916 \times 10^{-4}y + 0.00125\text{ m}^4$ 。悬臂钢杆采用梁单元建模(采用 ABAQUS 软件),具体有限元模型示意图如图 2(c)所示,该模型被平均离散成 20 个单元和 21 个节点。

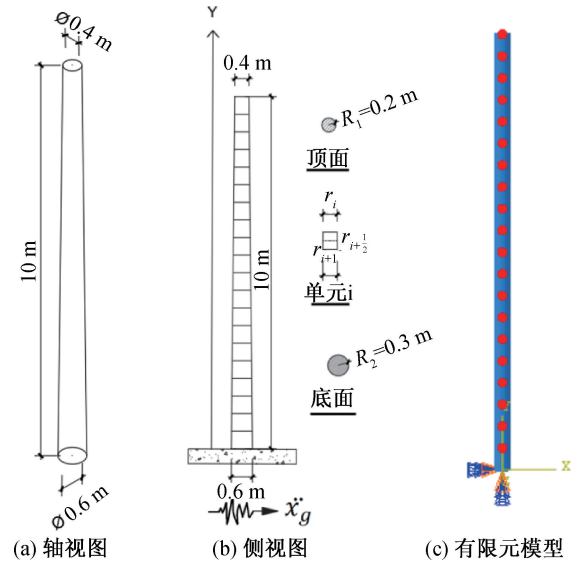


图 2 悬臂钢杆

Fig. 2 Cantilever steel rod

3.2 多项式形函数的系数计算

在有限元分析中,为了确定悬臂结构在水平集中荷载作用下的位移响应,将集中荷载施加在结构顶端,提取每个节点的位移值,并计算位移形

函数。然而,实际工程中需要的是结构特定部位的位移响应,该响应是由结构上附属设备位置 y_0 所决定。因此,选取了高度 10 m 作为实际工程中的典型位置,即悬臂结构的顶端位置,令该处的形函数 $\varphi(y_0)$ 的值等于 1,并对形函数进行归一化。归一化的结果如图 3 所示。将图 3 中的归一化形函数结果拟合成本研究提出的公式(8)的多项式形式,并通过边界条件确定待定系数 a 和 b 。通过此方法,得到了在水平集中荷载作用下多项式形函数的待定系数,分别为 $a = 1.501\ 7$ 和 $b = -0.501\ 7$ 。按同样的方法由有限元分析结果确定基本振型和倒三角分布荷载作用下的位移形函数。

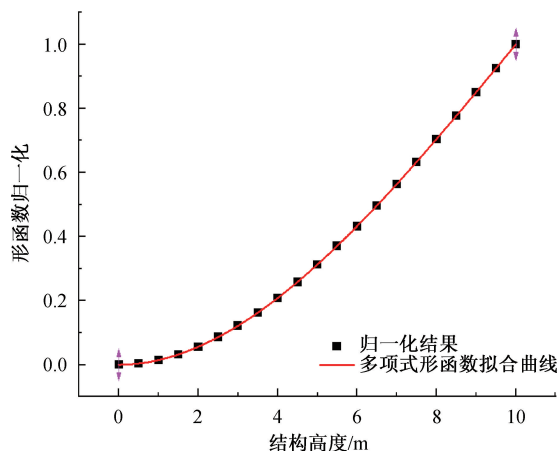


图3 多项式形函数曲线

Fig. 3 Polynomial shape function curve

表1 单自由度模型的等效参数

Tab. 1 Equivalent parameters of a single degree of freedom model

形函数提取方法	等效质量 m/kg	等效刚度 $k/(\text{N} \cdot \text{m}^{-1})$	等效阻尼 $c/(\text{kg} \cdot \text{s}^{-1})$	产生外部惯性力的 等效质量 l/kg
水平集中荷载	4 524.83	1 213 670	2 964.23	6 822.47
基本振型	4 820.77	1 199 080	3 041.18	7 115.56
倒三角分布荷载	4 858.38	1 220 210	3 079.80	7 151.81

表2 选取的地震动记录

Tab. 2 Selected ground motion records

编号	地震名称	场地土类别	震级	峰值加速度/ g	持时/ s
1	1994 Northridge	II类	6.7	0.590	39.94
2	1978 Tabas L	I类	7.4	0.845	32.94
3	1978 Tabas T	II类	7.4	0.105	39.94
4	1979 Imperial Valley	III类	6.5	0.270	51.56
5	1989 Loma Prieta	I类	6.9	0.570	24.99
6	1971 San Fernando	I类	6.6	1.238	41.69
7	1995 Kobe	II类	6.9	0.240	40.93
8	天津波	IV类	6.9	0.149	19.19
9	上海波(人工波)	IV类	—	0.036	36.85
10	1999 Turkey	II类	7.1	0.012	59.97
11	1980 Victoria	III类	6.3	0.292	25.56
12	1966 Parkfield	III类	6.2	0.272	26.18

3.3 广义单自由度模型的参数计算

根据 3.2 节确定多项式形函数的待定系数 a 和 b 后,由公式(1)~(4)对多项式形函数进行积分求解,求得多项式形函数分别在集中水平荷载、基本振型、倒三角分布荷载作用下的等效参数 m 、 c 、 k 和 l ,计算结果列于表 1 中。

4 基于多项式形函数的广义单自由度模型的有效性分析

本节通过对比由有限元模型和广义单自由度模型得到的最大响应,调查基于多项式形函数的广义单自由度模型的有效性。

4.1 输入地震波

地震动记录的选取准则主要考虑场地土类别、震级、地震动峰值加速度、地震波持时等因素。如表 2 所示,本研究选择了 I—IV 类场地土类别和 6—8 级震级范围内的 12 条自然地震波作为悬臂结构有限元模型和广义单自由度模型的输入地震波。

4.2 结构地震响应

假设结构特定高度处的水平地震响应为 $u(t)$,极值为

$$U_{\max} = \max_{0 \leq t \leq T} |u(t)| \quad (9)$$

式中, T 为地震波持时, s 。

有限元模型的地震响应由模态叠加法进行求解,为保证每个方向上各阶模态参与质量系数大于 90%,本项研究选取前 5 阶模态进行分析。广义单自由度模型的地震响应采用杜哈梅积分进行求解。根据表 1 中水平集中荷载的计算结果,分别计算 12 组地震波作用下悬臂结构广义单自由度模型和有限元模型的地震响应。表 3 给出了由基于抛物线形函数(公式(6))、三角函数形函数(公式(7))和多项式形函数(公式(8))的广义单自由度模型和有限元模型计算的高度 10 m 处的最大位移响应。San Fernando 地震波输入下的位移响应绘于图 4 中。

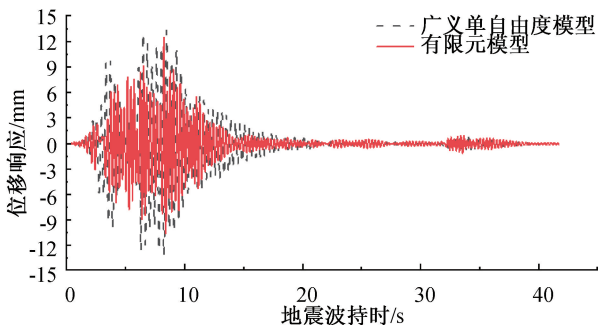


图 4 地震响应对比
Fig. 4 Comparison of earthquake responses

4.3 广义单自由度模型的有效性分析

表 3 的计算结果表明,基于多项式形函数的广义单自由度模型的最大位移响应,其计算结果的最小相对误差为 1.21%,最大相对误差为 22.10%,平均误差为 7.20%,而基于抛物线形函数和三角函数形函数的广义单自由度模型的平均相对误差分别为 27.06%和 15.93%。由图 4 可以看

出,基于多项式形函数的广义单自由度模型和有限元模型的时程曲线吻合程度较好,结构 10 m 位置的位移响应极值非常接近。

图 5 绘出了表 3 中每条地震波激励下基于多项式形函数的广义单自由度模型和有限元模型的位移响应最大值 $U_{\max}$ 、变异系数 $C \cdot V$ 和均方根误差 RMSE。图 5 表明,基于多项式形函数的广义单自由度模型计算结果与有限元模型计算结果的均方根误差 RMSE 很小,这意味着两种模型之间具有很高的相似性,进一步说明了基于多项式形函数的广义单自由度模型在地震响应分析中具有优势。同时,该模型的变异系数 $C \cdot V$ 为 0.81,表明数据点之间存在较大的离散性。

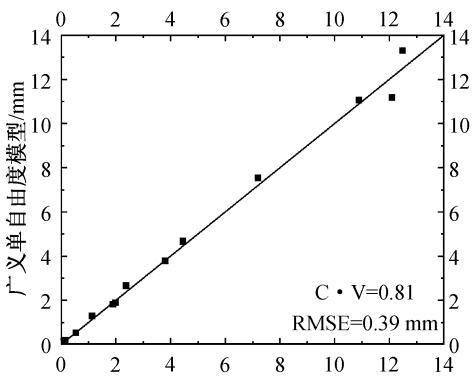


图 5 有限元分析和广义单自由度模型的最大位移响应
Fig. 5 Maximum displacement response for finite element analysis and generalized single degree of freedom models

为了进一步调查多项式形函数的适用性,分别利用水平集中荷载作用、基本振型和倒三角分布荷载作用下的有限元模型分析结果,拟合生成

表 3 基于不同形函数模型的最大位移响应和相对误差

Tab. 3 Maximum displacement response and relative errors based on different shape function models									
地震波	抛物线形函数			三角函数形函数			多项式形函数		
	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$
1994 Northridge	11.30	10.97	2.89	10.98	9.33	15.07	10.90	11.06	1.49
1978 Tabas L	12.55	6.70	46.63	12.20	9.50	22.19	12.11	11.17	7.80
1978 Tabas T	1.17	1.24	5.74	1.14	0.97	14.78	1.13	1.29	14.05
1979 Imperial Valley	4.61	2.15	53.47	4.48	3.57	20.33	4.45	4.66	4.82
1989 Loma Prieta	7.48	8.52	13.95	7.27	6.76	6.93	7.21	7.54	4.62
1971 San Fernando	12.95	7.63	41.10	12.59	14.34	13.86	12.49	13.29	6.37
1995 Kobe	3.95	1.96	50.51	3.84	4.24	10.28	3.81	3.77	1.21
天津波	1.96	1.02	47.68	1.90	1.37	27.99	1.89	1.82	3.75
上海波(人工波)	0.56	0.40	27.73	0.54	0.43	20.35	0.54	0.52	3.41
1999 Turkey	0.15	0.13	12.10	0.14	0.14	2.75	0.14	0.17	22.10
1980 Victoria	2.06	2.38	15.12	2.01	1.32	34.40	1.99	1.89	4.91
1966 Parkfield	2.47	2.27	7.77	2.40	2.34	2.21	2.38	2.66	11.87

注:表中 F 为有限元结果, S 为单自由度模型结果, ε 为相对误差。

表 4 基于不同形函数提取方法的最大位移响应和相对误差

Tab. 4 Maximum displacement response and relative errors based on different shape function extraction methods

地震波	水平集中荷载			基本振型			倒三角分布荷载		
	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$	F/mm	S/mm	$\varepsilon/\%$
1994 Northridge	10.90	11.06	1.49	10.67	11.47	7.46	10.64	11.34	6.55
1978 Tabas L	12.11	11.17	7.80	11.85	13.86	16.90	11.82	13.27	12.21
1978 Tabas T	1.13	1.29	14.05	1.11	1.10	0.83	1.10	1.05	5.16
1979 Imperial Valley	4.45	4.66	4.82	4.36	5.25	20.57	4.34	5.04	16.07
1989 Loma Prieta	7.21	7.54	4.62	7.06	9.66	36.79	7.04	9.39	33.37
1971 San Fernando	12.49	13.29	6.37	12.23	22.44	83.49	12.20	21.43	75.67
1995 Kobe	3.81	3.77	1.21	3.73	3.62	2.91	3.72	3.66	1.63
天津波	1.89	1.82	3.75	1.85	2.27	22.87	1.84	2.19	18.74
上海波(人工波)	0.54	0.52	3.41	0.53	0.51	2.71	0.53	0.51	3.78
1999 Turkey	0.14	0.17	22.10	0.14	0.20	45.69	0.14	0.20	45.51
1980 Victoria	1.99	1.89	4.91	1.95	2.16	10.78	1.94	2.07	6.34
1966 Parkfield	2.38	2.66	11.87	2.33	3.39	45.74	2.32	3.26	40.36

注:表中 F 为有限元结果, S 为单自由度模型结果, ε 为相对误差。

形函数,构造三个广义单自由度模型。表 4 列出了三个广义单自由度模型的计算误差,结果显示,基于水平集中荷载作用下多项式形函数的广义单自由度模型的整体平均误差明显小于其他两种模型。三个广义单自由度模型计算结果的均方根误差 RMSE 分别为 0.39、3.13、2.81 mm,基于水平集中荷载作用下形函数的广义单自由度模型的均方根误差最小。

5 结论

1)在建立广义单自由度模型方面,与常用的抛物线形函数和三角函数形函数相比,本文提出的多项式形函数具有更高的精度,能够快速拟合出满足边界条件的多项式函数曲线,并且对不同类型地震波输入的适用性更加广泛。

2)在进行多项式形函数参数估计时,建议通过对结构施加水平集中荷载,计算结构的水平变形形状。

参考文献:

- [1] 李明政,于洋,刘占宇,等.采用隔震支座的料仓-框架结构的动力响应分析[J].河北工程大学学报(自然科学版),2021,38(3):46-54.
- [2] 马安财,刘良坤,谭平,等.基于分布参数模型深水隔震连续梁桥地震响应分析方法[J].应用基础与工程科学学报,2022,30(4):1002-1013.
- [3] 夏仕洋,孙逊,方立新,等.减震技术在优秀近代建筑更新中的应用研究[J].建筑结构,2023,53(2):

55-61.

- [4] FREEMAN S A. Evaluations of existing buildings for seismic risk-A case study of Puget Sound Naval Shipyard [C]//Proceedings of the 1st U. S. National Conference on Earthquake Engineering. Bremerton, Washington, 1975: 113-122.
- [5] 黄超,梁兴文,党争,等. FRC 框架结构基于等效单自由度模型的抗地震倒塌能力评估[J].工程力学,2016,33(2):127-135.
- [6] 张大巍,黄薇,严衍隆. 厂房结构弹塑性动力分析与抗震性能评估[J].河北工程大学学报(自然科学版),2009,26(2):32-35.
- [7] CLOUGH R W, PENZIEN J. Dynamics of structures [M]. 3rd ed. Berkeley: Computers & Structures Inc, 1995.
- [8] 程鹏飞,李杰,陈壮壮,等. 漂浮体系斜拉桥简化单自由度模型[J].河南科学,2018,36(8):1232-1238.
- [9] 王赞芝,胡如成,张鹏,等. 简支梁随机振动问题的简化解法[J].河北农业大学学报,2009,32(3):121-124.
- [10] SONG J, KIUREGHIAN A D, SACKMAN J L. Seismic response and reliability of electrical substation equipment and systems [D]. California: University of California, 2004: 262.
- [11] Der KIUREGHIAN A, SACKMAN J L, HONG K J. Further studies on seismic interaction in interconnected electrical substation equipment [R]. Berkeley: Pacific Earthquake Engineering Research Center, 2000: 108.
- [12] CHOPRA A K. Dynamics of structures: Theory and applications to earthquake engineering [M]. 4th ed. Upper Saddle River, N. J.: Prentice Hall, 2012.

(责任编辑 王利君)