文章编号：1673-9469（2019）01-0054-05 doi:10.3969/j.issn.1673-9469.2019.01.012

# 考虑相对暴露度的无粘性土临界流速计算方法探讨

陈 亮[1,2]，陈 成[1,2]，何健健[1,2]

(1.河海大学 岩土力学与堤坝工程教育部重点试验室，南京 210098；2.河海大学 岩土工程科学研究所，南京 210098)

**摘要**：研究建立了基于泥沙运动力学理论的土颗粒起动模型，在考虑相对暴露度基础上，推导了土体渗流引起内部侵蚀的临界流速计算公式。通过与试验测得临界流速值对比，发现试验值与计算值较为一致。讨论了临界流速计算值与试验值的差异和相对暴露度与临界流速关系。渗流过程中颗粒堆积，会导致颗粒运移通道阻塞，使临界流速试验值大于计算值。临界流速与土颗粒相对暴露度正相关，不同渗流方向下相对暴露度对临界流速影响程度不同，水平渗流时相对暴露度影响较大，垂直渗流时，相对暴露度对临界流速几乎没有影响。

**关键词**：临界流速；相对暴露度；无粘性土；渗流方向

**中图分类号**：TU441 **文献标识码**：A

# A Theoretical Calculation of Critical Flow Velocity of Non-cohesive Soil Considering Relative Exposure

CHEN Liang[1,2]，CHEN Cheng[1,2]，HE Jianjian[1,2]

(1.Key Laboratory of Geomechanics and Embankment Engineering Hohai University，Nanging 210098；2.Geotechnical Research Institute of Hohai University Nanging，210098)

**Abstract**：In this paper， a soil particle starting model based on the theory of sediment motion mechanics is established. Based on the relative exposure， the formula for calculating the critical velocity of internal erosion caused by soil seepage is derived. Comparing with the critical flow rate measured in the test， it is found that the test value is consistent with the calculated value. The difference between the calculated value of the critical flow rate and the experimental value and the relationship between the relative exposure and the critical flow rate are discussed. The accumulation of particles during the seepage process will cause the particle transport channel to block， and the critical flow rate test value is greater than the calculated value. The critical flow rate is positively correlated with the relative exposure of soil particles. The relative exposure degree has different influence on the critical flow rate in different seepage directions. The relative exposure has a great influence on horizontal seepage. For the vertical seepage，the relative exposure has little effect on the critical flow velocity.

**Key words**：critical flow velocity；relative exposure；non-cohesive soil；relative exposure degree

渗流作用下的土颗粒将承受渗透压力，当土体渗流达到临界状态时，土体受到侵蚀，从而导致土体结构失稳[1]。Foster[2]在研究中指出，一大半堤坝失事的原因都是渗流引起的内部侵蚀。Richards与Reddy[3]在研究中也得出类似结论。前人除对临界水力梯度[4]、土体内部侵蚀发展机理[5-7]等进行研究外，临界流速也是土体内部侵蚀理论的研究重点[8-9]。除渗流方向[10]、应力状态[11]、颗粒级配[12]会影响内部侵蚀临界流速，相对暴露度也会影响临界流速。国内外学者[13-18]对相对暴露度进行了研究。但是，这些研究在考虑颗粒受力特征时，没有考虑渗流条件下的颗粒起动，忽略了颗粒所受渗透压力。本文

收稿日期：2018-10-18
基金项目：国家自然科学基金资助项目(51778210)；江苏省自然科学基金资助项目(BK20151495)
作者简介：陈亮(1976-)，男，江苏徐州人，博士，教授，主要从事岩土渗流理论与测试方面的研究。

建立了基于泥沙运动力学理论的土颗粒起动模型，推导了土体渗流引起的内部侵蚀临界流速计算公式。通过试验数据，验证了该公式的合理性。

## 1 理论方法

### 1.1 可动颗粒受力分析

如图 1 所示，A、B 为粗颗粒，C、D 为可动颗粒，A、B、C 颗粒的圆心分别为 $O_3$、$O_2$、$O_1$，M 为可动颗粒 C 与粗颗粒 B 的接触点，可动颗粒 C 半径为 $R$。当渗流引起土体内部侵蚀时，可动颗粒在粗颗粒形成的孔隙通道中发生移动并被带出。$\beta$ 为 $O_1$、$O_2$ 的连线与垂直方向的夹角，用 $\Delta$ 表示可动颗粒 C 的暴露度。

因此，可动颗粒 C 的相对暴露度 $\Delta'$ 表示为：

$$\Delta' = \Delta / R \tag{1}$$

由图 1 可知，相对暴露度 $\Delta'$ 与夹角 $\beta$ 的几何关系可表示为：

$$\cos\beta = \frac{R-\Delta}{R} = 1 - \frac{\Delta}{R} = 1 - \Delta' \tag{2}$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\left(1-\frac{\Delta}{R}\right)^2} = \sqrt{2\frac{\Delta}{R} - \left(\frac{\Delta}{R}\right)^2} = \sqrt{2\Delta' - \Delta'^2} \tag{3}$$

渗流过程中，细颗粒 C 所受上举力 $F_L$，拖曳力 $F_D$，重力 $G$，渗流力 $F$ 由以下各式计算。

$$F_L = \frac{C_L \rho_s}{2} \frac{\pi}{4} d^2 v^2 \tag{4}$$

$$F_D = \frac{C_D \rho_s}{2} \frac{\pi}{4} d^2 v^2 \tag{5}$$

$$G = \frac{\pi d^3 (\rho_s - \rho_w)}{6} g \tag{6}$$

$$F = \frac{\pi d^3}{6}\gamma_w i = \frac{\pi d^3}{6}\gamma_w \frac{v}{k} = \frac{\pi d^3 \gamma_w}{6k} v \tag{7}$$

式中，$\rho_s$ 为可动颗粒干密度 (kg/m$^3$)，为水的密度 $\rho_w$(kg/m$^3$)，$d$ 为可动颗粒 C 粒径 (m)，$v$ 为渗透流速 (m/s)，$C_L$ 为上举力系数，取 0.1，CD 为阻力系数，取 0.4[13]，$i$ 为水力梯度，$\gamma_w$ 为水的重度 (N/m$^3$)，k 为渗透系数 (cm/s 或 m/s)，$e$ 为孔隙比。

太沙基 [19] 给出了渗透系数计算式，$d_{10}$ 为小于某粒径颗粒含量为 10% 所对应的颗粒粒径，这个公式中 $d_{10}$ 以 mm 计算，算出的 $k$ 值单位取 cm/s。故当 $k$ 值单位取 m/s 时，$k$=0.02$d_{10}^2e^2$，$d_{10}$ 仍以 mm 计算。所以渗流力 $F$ 可表示为：

$$F = \frac{\pi d^3 \gamma_w}{6k} v = \frac{\pi d^3 \gamma_w}{0.12 d_{10}^2 e^2} v \tag{8}$$

### 1.2 可动颗粒受力平衡

如图 1 所示，分析可动颗粒 C 起动瞬间，受到的各个力对可动颗粒 C 与粗颗粒 B 的接触点 M 的力矩平衡，可得力矩平衡方程如式 (9) 所示。

$$GR\sin\beta - (F_L + F\sin\alpha + F_D\sin\alpha)R\sin\beta - F\cos\alpha R\cos\beta - F_D\cos\alpha\left(\frac{R}{3} + R\cos\beta\right) + F_n \times 0 = 0 \tag{9}$$

式 (9) 中，$R$ 为可动颗粒 C 半径 (mm)，$\alpha$ 为拖曳力 $F_D$ 与渗流力 $F$ 与水平方向的夹角，$\beta$ 为圆心 $O_1$，$O_2$ 连线与垂直方向的夹角。

### 1.3 渗流引起的内部侵蚀临界流速的计算公式

由 (9) 可知，当可动颗粒 C 所受拖曳力、上举力、渗透压力产生的力矩大于重力产生的力矩时，颗粒起动，此时对应的流速即为渗流条件下土体内部侵蚀的临界流速。将各力的表达式代入式 (9)，并化简，可得到一个关于流速 $v$ 的一元二次方程：

$$-\rho_s\pi\left[\sin\beta\left(\frac{1}{80} + \frac{\sin\alpha}{20}\right) + \frac{1}{20}\cos\alpha\left(\frac{1}{3} +\right.\right.$$

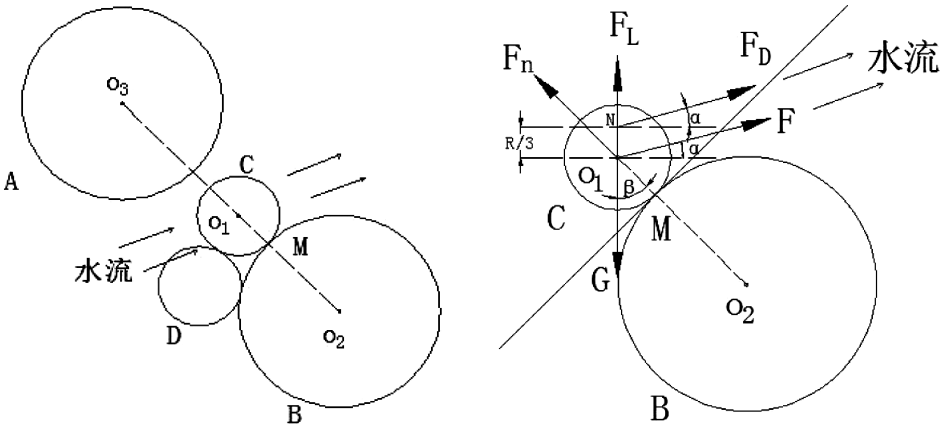


图 1 可动颗粒 C 的相对位置及受力分析

Fig.1 Relative position and force analysis of movable particle C

$$\cos\beta\Big)\Big]v^2-\frac{\pi d\gamma_w}{0.12d_{10}^2e^2}\left(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\ \cos\beta\right)v+$$

$$\frac{\pi d}{6}\left(\rho_s-\rho_w\right)\ g\sin\beta=0 \tag{10}$$

用相对暴露度 $\Delta'$ 与夹角 $\beta$ 的几何关系式 (2)、(3)，表示式 (10) 所示方程的系数 a、b、c 可得：

$$a=-\rho_s\pi\left[\sqrt{2\Delta'-\Delta'^2}\left(\frac{1}{80}\ \frac{\sin\alpha}{20}\right)+\right.$$

$$\left.\frac{1}{20}\cos\alpha\left(\frac{4}{3}-\Delta'\right)\right] \tag{11}$$

$$b=-\frac{\pi d\gamma_w}{0.12d_{10}^2e^2}\left[\sin\alpha\sqrt{2\Delta'-\Delta'^2}+\right.$$

$$\left.\cos\alpha(1-\Delta')\right] \tag{12}$$

$$c=\frac{\pi dg}{6}\left(\rho_s-\rho_w\right)\sqrt{2\Delta'-\Delta'^2} \tag{13}$$

显然，$a<0$，$b<0$，$c<0$，故有 $ac<0$，$b^2-4ac>b^2>0$，所以：$v_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$（略去），

$$v_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}<0$$

因此，土体内部侵蚀临界流速的计算公式为：

$$v=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \tag{14}$$

## 2 相对暴露度对临界流速影响

本文在式 (11)—(14) 中给出了临界流速计算公式，依据公式可以得出相对暴露度与临界流速的关系。如图 2 所示，采用 Ahlinhan[20] 试验中 A1 与 E1 试样的试验参数，不同渗流角度下临界流速随相对暴露度变化曲线。从图中可以看出，在试样 A1 与 E1 基础上计算得到的，土体参数对临界流速的影响规律是比较一致的。相对暴露度与临界流速正相关，即在同一渗流角度下，临界流速随颗粒相对暴露度的增加而增加。由本文第二节的颗粒受力分析可知，相对暴露度越大时，可动颗粒距离粗颗粒的上顶点越远，重力到可动颗粒与粗颗粒接触点的力臂越大，需要更大的力来克服重力力矩，此时的临界流速也越大。

从图 2 还可以看出，与 Richards[21] 不同渗流角度下土体临界流速存在差异的结论是一致的。当 $\alpha$=90° 时，曲线斜率趋近于 0，随着相对暴露度的增加，临界流速增量很小，此时相对暴露度对临界流速影响不大；当 $\alpha$=0° 时，曲线斜率趋近于 1，临界流速随相对暴露度变化明显。相对暴露度影响颗粒起动时的力臂大小，从而影响力矩，而随着渗流角度增大，可动颗粒所受拖曳力与渗透压力方向趋于竖直，当渗流角度达到 90° 时，颗粒起动只需要克服重力，不需要克服重力的力矩，此时相对暴露度的影响很小。

## 3 算例与分析

在研究渗流条件下的土体内部侵蚀临界流速时，本文以 $d_{15}$ 作为可动颗粒的代表粒径 [22]，相对暴露度取值为 0.2，即相对暴露度小于 0.2 的，粒径等于 $d_{15}$ 的土颗粒起动时对应的流速，为渗流条件下土体内部侵蚀的临界流速。本文依据式 (11)(14) 计算内部侵蚀临界流速时，取 $d=d_{15}$，$\Delta\Delta'=0.2$。本文选取国内外学者的部分研究成果，将本文计算所得渗流条件下内部侵蚀临界流速与试验中测得的数据进行对比分析，以验证临界流速计算公式的合理性。

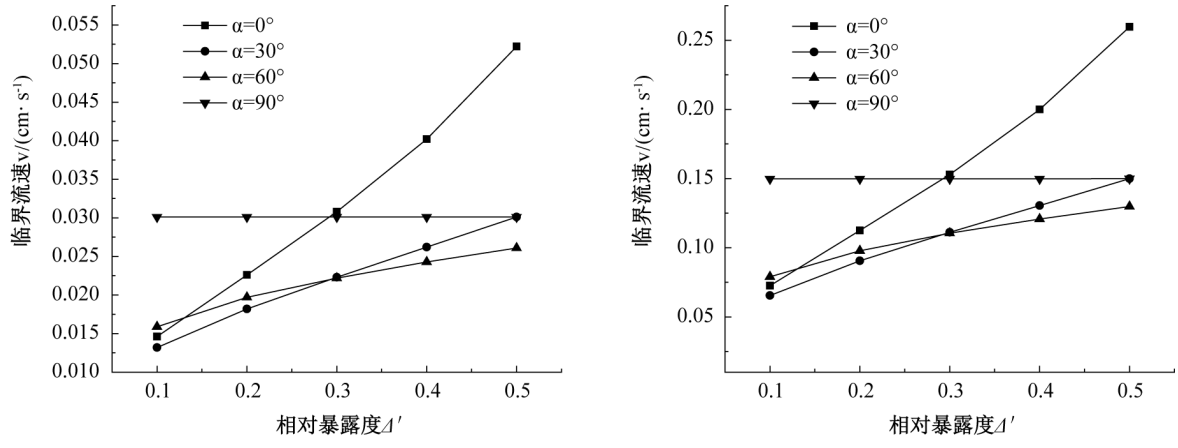


图 2 相对暴露度与临界流速关系

Fig.2 Relative exposure and critical flow rate

Skempton 等 [23] 试验结果表明，土样 A、B 受到渗流引起的内部侵蚀破坏，细颗粒被带出土体。土体参数如表 1 所示。当试验流速为 0.099 9 cm/s 时，土样 A 顶部开始有土颗粒被水流带出，同样流速为 0.107 9 cm/s 时，土样 B 也受到水流侵蚀，较细的土颗粒被带出土体；而本文计算的土样 A、B 的临界流速分别为 0.088 5 cm/s、0.113 9 cm/s，与试验测得的临界流速是比较接近的。Ahlinhan 等 [20] 对五种不同级配的无粘性土开展渗透试验，土体参数如表 1 所示。试验测得土样 A1 的临界流速为 0.03 cm/s，本文计算值为 0.030 1 cm/s，两者非常接近。当流速为 0.16 cm/s 时，试验测得的土颗粒流失质量与水流流速出现剧烈增加，此时土体发生内部侵蚀，本文计算值 0.149 8 cm/s 略小于试验值。

徐波琴等 [24] 开展了垂直向上的砂砾石渗透试验，当渗透流速为 0.032 cm/s 时，达到颗粒起动的临界条件，土体受到侵蚀。姚志雄等 [25] 测定了五组砂样垂向渗流作用下的临界流速，临界流速范围约为 0.24 ～ 0.8 cm/s。

本文依据公式 (14) 计算得到各组试样内部受到侵蚀时的临界流速，与各个试验测得的临界流速对比如图 3(a) 所示。试验土体用到的计算参数如表 1 所示。由图 3(a) 可以看出，本文的结算结果与试验测得的数据，具有较好的一致性 ($R^2$=0.98)。但是，图中部分数据点位于直线上方，即临界流速的试验值大于计算值，反映了理论计算与试验之间的差异。这种差异可能是土体受到侵蚀时，局部渗漏通道阻塞造成的。陈亮等 [12] 开展了若干组砂土渗透试验，发现试样 A2，A3 在试验过程中产生颗粒堆积。试验值与计算值对比结果如图 3(b) 所示。试样 A1，A4，C1 的试验临界流速与计算值契合度较好，而试样 A2，A3 的数据点位于直线上方，表明试验测

**表 1 试验土体参数**

**Tab.1 Test soil parameters**

| 文献 | 土样编号 | 渗流角度 /° | 土颗粒密度 $\rho_s$/(kg·m$^{-3}$) | 可动颗粒粒径 $d_{15}$/m | $d_{10}$/mm | 孔隙比 $e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Skempton and Brogan | A | 90 | 2 820 | 0.000 60 | 0.300 | 0.520 |
| | B | 90 | 2 820 | 0.000 90 | 0.300 | 0.590 |
| Ahlinhan | A1 | 90 | 2 650 | 0.000 20 | 0.124 | 0.771 |
| | E1 | 90 | 2 650 | 0.000 53 | 0.356 | 0.599 |
| 徐波琴 | | 90 | 1 880 | 0.000 33 | 0.240 | 0.497 |
| 姚志雄 | B1 | 90 | 2 633 | 0.000 92 | 0.764 | 0.577 |
| | B2 | 90 | 2 633 | 0.000 90 | 0.796 | 0.541 |
| | B3 | 90 | 2 633 | 0.000 60 | 0.478 | 0.499 |
| | C2 | 90 | 2 633 | 0.000 94 | 0.909 | 0.508 |
| | C3 | 90 | 2 633 | 0.001 00 | 0.740 | 0.667 |

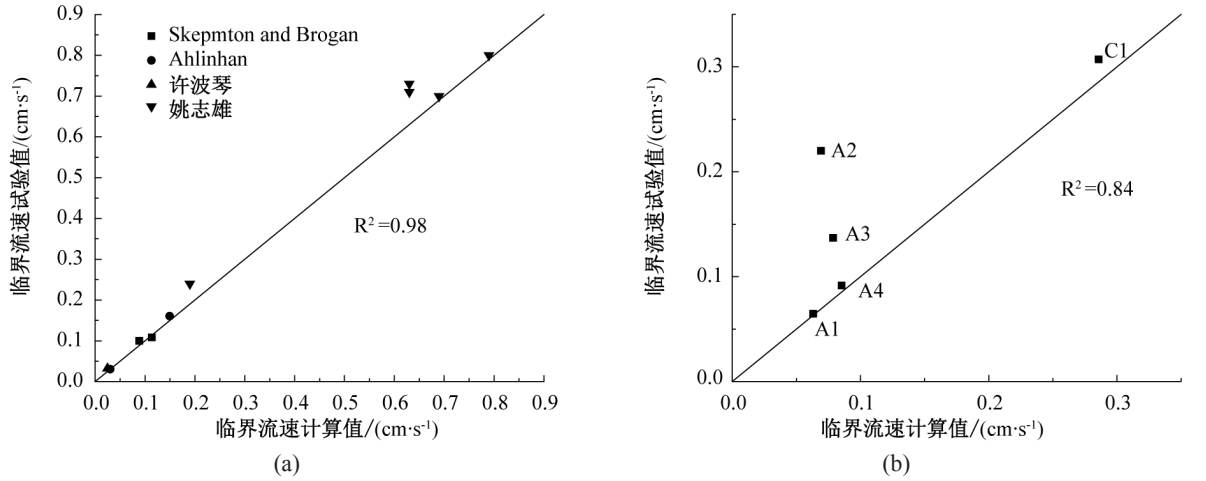


图 3 临界流速计算值与试验值对比

Fig.3 Comparison of the calculated values of the critical flow rate and the experimental values

得的临界流速大于计算值。因此，可动颗粒的堆积使土体孔隙通道受阻，导致试验测得的临界流速偏大的可能性较大，Reddi[26] 与 Richards[27] 在研究中也得出类似结论。

## 4 结论

依据本文公式计算的临界流速，与试验中测得的临界流速数据较为一致，证明本文临界流速计算公式较为合理。本文公式能够较好地解释渗流引起的土体侵蚀过程，以及土体侵蚀过程中的颗粒堆积和通道阻塞现象。

**参考文献：**

[1]BENDAHMANE F， MAROT D， ALEXIS A. Experimental parametric study of suffusion and backward erosion[J]. Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering， 2008， 134(1)：57-67.

[2]FOSTER M， FELL R， SPANNAGLE M. The statistics of embankment dam failures and accidents[J]. Revue Canadienne De Géotechnique， 2000， 37(5)：1000-1024.

[3]RICHARDS K S， REDDY K R. Critical appraisal of piping phenomena in earth dams[J]. Bulletin of Engineering Geology and the Environment， 2007， 66(4)：381-402.

[4]SAMANI Z A，WILLARDSON L S. Soil hydraulic stability in a subsurface drainage system[J]. Transactions of the ASAE， 1981， 24(3)：666-669.

[5]ADEL H D. Internl stability of minestone[J]. Proc. Int. Symp. Modelling Soil-Water-Structure Interaction，1988.

[6]BENMEBAREK N， BENMEBAREK S， KASTNER R. Numerical studies of seepage failure of sand within a cofferdam[J]. Computers&Geotechnics， 2005， 32(4)：264-273.

[7]TERZAGHI K. Simple tests determine hydrostatic uplift[J]. Engineering news record， 1936， 116：872-872.

[8] 周晓杰，介玉新，李广信 . 堤防管涌的数值模拟 [J]. 水力发电学报，2011，30(2)：100-106.

[9] 赵正信，陈建生，陈 亮，等 . 无黏性土管涌的临界流速 [J]. 水利水电科技进展，2008，28(2)：13-15.

[10] 梁 越，张 强，曾 超，等 . 变向渗流下的无黏性土颗粒起动机理研究 [J]. 重庆交通大学学报：自然科学版，2016，35(2)：89-92.

[11] 罗玉龙，吴 强，詹美礼，等 . 考虑应力状态的悬挂式防渗墙 - 砂砾石地基管涌临界坡降试验研究 [J]. 岩土力学，2012(s1)：73-78.

[12] 陈 亮，张红宇，雷 文，等 . 无黏性土管涌出砂与渗透性非均匀发展试验研究 [J]. 岩土工程学报，2012，34(8)：1432-1439.

[13] 韩其为，何明民 . 泥沙起动规律及起动流速 [M]. 北京：科学出版社，1984.

[14]WILCOCK P R. Critical shear stress of natural sediments[J]. Journal of hydraulic engineering， 1993，119(4)：491-505.

[15]PAINTAL A S. A stochastic model of bed load transport[J]. Journal of hydraulic research， 1971，9(4)：527-554.

[16]SHEN H W， LU J Y. Development and prediction of bed armoring[J]. Journal of Hydraulic Engineering， 1983，109(4)：611-629.

[17] 周 双，张根广，梁宗祥，邢 茹 . 斜坡上均匀散粒体泥沙的起动流速研究 [J]. 泥沙研究，2015(4)：7-13.

[18] 刘金泉，杨典森，陈卫忠，等 . 全风化花岗岩突水通道扩展的颗粒起动流速研究 [J]. 岩土力学，2017，38(4)：1179-1187.

[19]TERZAGHI K. Theoretical soil mechanics[M]. NewYork：John Wiley and Sons，1943：1-510.

[20]AHLINHAN M F， ACHMUS M， BURNS S E，et al. Experimental investigation of critical hydraulic gradients for unstable soils[J]. Geotechnical special publication，2011(210)：599-608.

[21]RICHARDS K S，REDDY K R. Experimental investigation of initiation of backward erosion piping in soils[J]. Géotechnique， 2012， 62(10)：933-942.

[22]KEZDI A. Soil physics[M]. Elsevier Scientific Publishing Company， 1979， Amsterdam.

[23]SKEMPTON A W， BROGAN J M. Experiments on piping in sandy gravels[J]. Géotechnique， 1994，44(3)：449-460.

[24] 许波琴，陈建生，梁 越 . 细砂管涌破坏试验及渗透变形分析 [J]. 水电能源科学，2012，30(6)：66-69.

[25] 姚志雄，周 健，张 刚，等 . 颗粒级配对管涌发展的影响试验研究 [J]. 水利学报，2016，47(2)：200-208.

[26]REDDI L N， LEE I， BONALA M V S. Comparison of internal and surface erosion using flow pump tests on a sand-kaolinite mixture[J]. Geotech. 2000， 01(1)：116–122.

[27]RICHARDS K S，REDDY K R. Experimental investigation of initiation of backward erosion piping in soils[J]. Géotechnique， 2012， 62(10)：933-942.

（责任编辑 李新）